



TITLE:

On a Certain Decomposition of 2-  
Dimensional Cycles on a Product of Two  
Algebraic Surfaces (特異点をめぐる位相的解  
析の様相)

AUTHOR(S):

岡本, 真理子

---

CITATION:

岡本, 真理子. On a Certain Decomposition of 2-Dimensional Cycles on a Product of Two Algebraic Surfaces (特異点をめぐる位相的解析の様相). 数理解析研究所講究録 1982, 450: 49-61

ISSUE DATE:

1982-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102950>

RIGHT:

On a certain decomposition of 2-dimensional cycles  
on a product of two algebraic surfaces

都立大 理 岡本 真理子

# I 二つの曲線 $\alpha$ 積多様体についての復習

$C, C'$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上定義された, 非特異代数曲線とする.

$1^\circ$   $X$  を積多様体  $C \times C'$  上の divisor とする.  $X \equiv 0$  とは,

$C'$  上の  $0$ -cycle  $\alpha$  と  $C$  上の  $0$ -cycle  $\beta$  が存在して

$X \sim C \times \alpha + \beta \times C'$  (線型同値) と書けることをとする.  $n \geq 0$  とし

$$\text{Con}(C, C') = \frac{\{\text{divisors on } C \times C'\}}{\{\text{divisors } X \text{ on } C \times C' \text{ s.t. } X \equiv 0\}}$$

と置く.

$\psi: C \rightarrow J(C), \psi': C' \rightarrow J(C')$  を  $C, C'$  の Jacobi 多様体とし,

$\pi_1, \pi_2$  を  $C \times C'$  から  $C, C'$  への projection とする.  $C$  の閉点,

$P$  に対して  $X(P) = \pi_{2*}(X \cdot \pi_1^* P)$  は  $C'$  上の  $0$ -cycle を, 従って

$\psi_*(X(P))$  は  $J(C')$  上の  $0$ -cycle を定める.  $J(C')$  上の  $0$ -cycle

は  $J(C)$  の形式和を Abel 多様体  $J(C)$  の算法にかゝる準同型を

$S$  とすると,  $S(\varphi_*(X(P)))$  は  $J(C)$  の点を定める.  $C$  から  $J(C)$  への写像  $P \mapsto S(\varphi_*(X(P)))$  の線型化を  $\xi_X: J(C) \rightarrow J(C)$  とする. このとき  $\text{Cor}(C, C')$  の元  $X$  の左の方により,  $\text{Hom}(J(C), J(C'))$  の元  $\xi_X$  が定まることが確かめられる.

$$\begin{aligned} \text{Cor}(C, C') &\cong \text{Hom}(J(C), J(C')) \\ ; [X] &\longmapsto \xi_X \end{aligned}$$

と定める ( $[X] = [X]$  は  $X$  の " $\equiv$ " による同値類). ([12]).

$2^0$   $C, C'$  の genus を  $g, g'$  とする.

$\sigma_1, \dots, \sigma_{2g} (\sigma'_1, \dots, \sigma'_{2g'}) : H_1(C, \mathbb{Z}) (H_1(C', \mathbb{Z}))$  の basis.

$\delta_1, \dots, \delta_{2g} (\delta'_1, \dots, \delta'_{2g'}) : H^1(C, \mathbb{Z}) (H^1(C', \mathbb{Z}))$  における  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}$  ( $\sigma'_1, \dots, \sigma'_{2g'}$ ) の dual basis.

$\omega_1, \dots, \omega_g (\omega'_1, \dots, \omega'_{g'}) : H^0(C, \Omega_C) (H^0(C', \Omega_{C'}))$  の basis.

と定める. これらにより  $2$  つの period matrix を  $\Omega_C = [\int_{\sigma_i} \omega_j], \Omega_{C'} = [\int_{\sigma'_i} \omega'_j]$  とする.

今,  $X$  は  $H^1(C, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C', \mathbb{Z})$  の元で  $X = \sum a_{ij} \delta_i \otimes \delta'_j$ ,  $A_X = [a_{ij}] \in M(2g, \mathbb{Z})$  と表わすことができる. このとき

$$X \in H^{1,1}(C \times C') \text{ (Hodge (1.1)-part)} \iff {}^t \Omega_C A_X \Omega_{C'} = 0$$

であり, さらにこのとき  $X$  は algebraic とわかる.

II  $S, S'$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上定義された. 非特異射影曲面とする.

$1^\circ$   $C^2(S \times S')$  の余次元 2 の cycles の rational equivalence class group を表わす. また. 積多様体  $S \times S'$  から  $S, S'$  への projection を  $\pi_1, \pi_2$  とする.

### 定義 1.1

$$FC^2(S, S') = \left\langle [X] \in C^2(S \times S') \mid \begin{array}{l} X: S \times S' \text{ 上の既約, 2次元} \\ \text{subvariety} \\ \min[\dim \pi_1(X), \dim \pi_2(X)] \leq 1 \end{array} \right\rangle$$

$$Cor^2(S, S') = C^2(S \times S') / FC^2(S, S')$$

cycle map  $cl: C^2(S \times S') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow H^4(S \times S', \mathbb{Q})$  を考へ.

$$H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{alg} = \text{Im}(cl) \text{ とおく.}$$

$$H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{alg} \subseteq H^{2,2}(S \times S') \cap H^4(S \times S', \mathbb{Q}) \text{ とある.}$$

[6], [7] における Lieberman の結果から.  $H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{alg}$  の元は各 Künneth 成分は再び algebraic になる. すなわち

$$(1.2) \quad H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{alg} \cong \bigoplus_{p+q=4} [H^p(S, \mathbb{Q}) \otimes H^q(S', \mathbb{Q})]_{alg}$$

が成り立つ (こゝに  $[H^p(S, \mathbb{Q}) \otimes H^q(S', \mathbb{Q})]_{alg}$   
 $= [H^p(S, \mathbb{Q}) \otimes H^q(S', \mathbb{Q})] \cap H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{alg}$  ) .

とこより,  $H^2(S, \mathbb{C})_{trans} = \varinjlim_{U \subset S, \text{ Zariski open}} H^2(U, \mathbb{C})$  とおくと. 交点数に関する  $H^2(S, \mathbb{C})$  の超越的分解:

$$H^2(S, \mathbb{C}) \cong H^2(S, \mathbb{C})_{alg} \oplus H^2(S, \mathbb{C})_{trans}$$

が存在する (  $\because H^2(S, \mathbb{C})_{\text{alg}} = H^2(S, \mathbb{Q})_{\text{alg}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  ).

$H^2(S, \mathbb{C})_{\text{trans}}$  は  $S$  上の第2種微分型式の可逆空間に相当している (cf. [1], [3]).

ここでは,  $S \times S'$  上の Hodge 分解, K\"unneth 分解と, 上の超越的分解を組み合わせて,  $H^4(S \times S', \mathbb{C})$  の HKT-part と呼ばれる部分空間をとりだし, それを用いて  $H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{\text{alg}}$  を調べようことを考える.

### 定義 1.3

$$\begin{aligned} H^4_{\text{hkt}}(S, S') &\cong [H^{2,0}(S) \otimes H^{0,2}(S')] \oplus [H^{0,2}(S) \otimes H^{2,0}(S')] \\ &\quad \oplus [H^{1,1}(S) \otimes_{\text{trans}} H^{1,1}(S')_{\text{trans}}] \\ &\quad : H^4(S \times S', \mathbb{C}) \text{ の HKT-part} \end{aligned}$$

(  $\because H^{1,1}(S)_{\text{trans}} = H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{C})_{\text{trans}}$  ).

$$\begin{aligned} H^4_{\text{hkt}}(S, S')_{\text{alg}} &= H^4_{\text{hkt}}(S, S') \cap H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{\text{alg}} \\ &\quad : \text{algebraic HKT-part.} \end{aligned}$$

$\alpha$  とするとき,

$$H^4_{\text{hkt}}(S, S')_{\text{alg}} \cong [H^2(S, \mathbb{C})_{\text{trans}} \otimes H^2(S', \mathbb{C})_{\text{trans}}] \cap H^4(S \times S', \mathbb{Q})_{\text{alg}}$$

と表すことができることに注意しておく.

### 定義 1.4 $FH^4(S, S') = \mathcal{U}(FC^2(S, S') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$

$$DC^2(S \times S') = \langle D, D' \in C^2(S \times S') \mid D, D' \in C^1(S \times S') \rangle$$

$$DH^4(S \times S') = \mathcal{U}(DC^2(S \times S') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

仮定  $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(S) = q(S) = 0$  とする.

補題 1.5  $H^4(S \times S'; \mathbb{Q})_{\text{alg}} \cong [H^4(S; \mathbb{Q}) \otimes H^0(S'; \mathbb{Q})]$

$$\oplus [H^0(S; \mathbb{Q}) \otimes H^4(S'; \mathbb{Q})] \oplus [H^2(S; \mathbb{Q})_{\text{alg}} \otimes H^2(S'; \mathbb{Q})_{\text{alg}}] \oplus H^4_{\text{fnt}}(S, S')_{\text{alg}}.$$

これは, (1.2) から得られる. 右辺の第 3 の成分までは  $S$  および  $S'$  上の algebraic cycle から得られる cycle である. さらに  $\alpha = 0$  とがよい.  $p: H^4(S \times S'; \mathbb{Q})_{\text{alg}} \rightarrow H^4_{\text{fnt}}(S, S')_{\text{alg}}$  を (1.5) の分解に関する projection とする.

定理 1.6 i)  $FH^4(S, S') \cong [H^4(S; \mathbb{Q}) \otimes H^0(S'; \mathbb{Q})]$

$$\oplus [H^0(S; \mathbb{Q}) \otimes H^4(S'; \mathbb{Q})] \oplus [H^2(S; \mathbb{Q})_{\text{alg}} \otimes H^2(S'; \mathbb{Q})_{\text{alg}}],$$

ii)  $DH^4(S \times S') \subseteq FH^4(S, S')$ , 従って  $2p(DH^4(S \times S')) = 0$ .

特に,  $X \in C^2(S \times S')$ ,  $p(\text{cl}(X)) \neq 0$  ならば  $X$  は 2 つの divisors の交わりと homologous である.

証明 i) Poincaré duality より 自然な同型

$$H^2(S; \mathbb{C})_{\text{trans}} \otimes H^2(S'; \mathbb{C})_{\text{trans}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H^2(S; \mathbb{C})_{\text{trans}}, H^2(S'; \mathbb{C})_{\text{trans}})$$

$$; \quad X \longmapsto X(): u \longmapsto \pi_{2*}(X \cdot \pi_1^* u)$$

が存在する.  $H^2(S; \mathbb{C})_{\text{trans}}$  の定義から,  $X \in FH^4(S, S')$  ならば,

$X(): H^2(S; \mathbb{C})_{\text{trans}} \rightarrow H^2(S'; \mathbb{C})_{\text{trans}}$  は zero map とおぼえる. (1.3) の  $\alpha$

後の注意から i) がいえる。

ii).  $S$  と  $S'$  の divisorial correspondence ([5], [11]) を考えれば  $q(S) = q(S') = 0$  より。

$$H^2(S \times S'; \mathbb{Q})_{\text{alg}} \cong H^2(S; \mathbb{Q})_{\text{alg}} \oplus H^2(S'; \mathbb{Q})_{\text{alg}}.$$

ii) はこのことから明らかである。

また、 $H_{\text{hkt}}^4(S, S')$  は (1.1) で定義した  $\text{Cor}^2(S, S')$  の cohomology 空間での対応物となる。すなわち、次の可換で exact な図式が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & FC^2(S, S') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \rightarrow & C^2(S \times S') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \rightarrow & \text{Cor}^2(S, S') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \text{cl} \otimes \text{id} & & \downarrow \text{cl} & & \downarrow \bar{\text{cl}} & \\ 0 \rightarrow & FH^4(S, S') & \rightarrow & H^4(S \times S'; \mathbb{Q})_{\text{alg}} & \xrightarrow{p} & H_{\text{hkt}}^4(S, S')_{\text{alg}} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

以下、2°、3°では、ある種の曲面の積多様体について、 $\alpha$  algebraic HKT-part を調べてみる。

## 2° Singular K3 surfaces

$S$  を K3 surface とする。すなわち  $q(S) = 0$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(S) = 1$ .

K3 surface  $S$  は  $\dim_{\mathbb{C}} H^2(S; \mathbb{C})_{\text{alg}} = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(S)$  なるとき、

singular であるという。これは  $H^{1,1}(S)_{\text{trans}} \cong 0$  と同値である。

$S, S'$  を singular K3 surfaces とする.  $\omega, \omega' \in H^2(S, \mathbb{Q})$ ,  $\omega' \in H^2(S', \mathbb{Q})$  の basis,  $\sigma_1, \sigma_2 \in H_2(S, \mathbb{Q})_{\text{trans}}$  の basis,  $\sigma'_1, \sigma'_2 \in H_2(S', \mathbb{Q})_{\text{trans}}$  の basis とし,  $\tau = \frac{\int \sigma_1 \omega}{\int \sigma_2 \omega}$ ,  $\eta = \frac{\int \sigma'_1 \omega'}{\int \sigma'_2 \omega'}$  とおく.  $\tau \in \mathbb{C}$  に対し  $E_\tau \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  の形のある elliptic curve とする.  $\tau \neq 0$  とする. 次の定理が成立する.

定理 2.1  $H^4_{\text{ét}}(S, S')_{\text{alg}} \cong \text{Cor}(E_\tau, E_\eta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$   
 $\cong \text{Hom}(E_\tau, E_\eta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

### 3° Some quotient surfaces

$n$  を素数とし,  $\mathbb{P}^2$  の次数  $n$  の曲線  $C_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) を

$$u_2^n = \prod_{j=1}^n (u_1 - a_{ij} u_0) \quad , \quad \prod_{j \neq j'} (a_{ij} - a_{ij'}) \neq 0$$

で定め, ( $\mathbb{F}$  とし,  $\mathbb{F}$  は  $\mathbb{C}$  の代数閉包と仮定し,  $a_{ij} = \zeta^j$ ,  $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ )

とし,  $\mathbb{F}$  上では degree  $n$  の Fermat curve とする).  $G_n = \langle \zeta \rangle$

と置く.  $(u_0 : u_1 : u_2) \mapsto (u_0 : u_1 : \zeta u_2)$  により  $G_n$  は  $C_i$

に作用する.  $\zeta \mapsto (\zeta, \zeta^r)$  の写像  $z_r: G_n \hookrightarrow G_n \times G_n$  を定め

( $1 \leq r \leq n-1$ ),  $G^{(n)} = \text{Im}(z_r)$  と置く. 今,  $G^{(n)}$  は  $\tilde{S} = C_1 \times C_2$  上

$G^{(n)}$  は  $\tilde{S}' = C_3 \times C_4$  上に作用し,  $\tilde{S}$  と  $\tilde{S}'$  とを同一視する. したがって

$G^{(n, r)} = G^{(n)} \times G^{(n)}$  は  $\tilde{S} \times \tilde{S}'$  上に作用し,  $\tilde{S}$  と  $\tilde{S}'$  とを同一視する.

一方,  $\tilde{S}/G^{(n)}$ ,  $\tilde{S}'/G^{(n)}$  の non-singular model を  $S_r$ ,  $S'_r$  とする.  $\tau \neq 0$  とし,  $S'_1$  は次のように与えられる [8]:



$S_1: \prod_{j=1}^n (x_3 - a_{1j}x_2) = \prod_{j=1}^n (x_1 - a_{2j}x_0) \subset \mathbb{P}^3$   
 (たとえば,  $a_{1j} = a_{2j} = \zeta^j$  とすれば,  $S_1$  は Fermat surface とおける).

$$S'_1: \prod_{j=1}^n (x_3 - a_{1j}x_2) = \prod_{j=1}^n (x_1 - a_{4j}x_0) \subset \mathbb{P}^3$$

このとき,  $g(S_1) = g(S'_1) = 0$  とおき,  $n$  に注意し置く.  
 やさしい計算から.

$$(3.1) \quad H_{\text{het}}^4(\tilde{S}, \tilde{S}')_{\text{alg}} \cong \bigoplus_{1 \leq r, s \leq n-1} [H_{\text{het}}^4(\tilde{S}, \tilde{S}')_{\text{alg}}]^{G^{(r,s)}}$$

を得る.  $n=1$  に右辺は  $G^{(n,s)}$ -不変部分を表わす. さらに準同型

$$(3.2) \quad [H_{\text{het}}^4(\tilde{S}, \tilde{S}')_{\text{alg}}]^{G^{(r,s)}} \rightarrow H_{\text{het}}^4(S_r, S'_s)_{\text{alg}}$$

が存在するが,  $H^{2,0}(\tilde{S})^{G^{(n)}} \cong H^{2,0}(S_r)$  とおき,  $n$  から,  $n$  は左辺が零でないければ, non-zero map である.

さらに,  $J(C_i) \in C_i$  は Jacobi 多様体とし ( $i=1, 2, 3, 4$ ).

$$J = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1), J(C_3)) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_2), J(C_4)) \text{ とおくと}$$

( $n=1$  は  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1), J(C_3)) = \text{Hom}(J(C_1), J(C_3)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ),  $I, 1^\circ$  より自然な準同型  $J \rightarrow H_{\text{het}}^4(\tilde{S}, \tilde{S}')_{\text{alg}}$  が存在するから.

(3.1), (3.2) とあわせて準同型

$$\Theta^{r,s}: J \rightarrow H_{\text{het}}^4(S_r, S'_s)_{\text{alg}} \quad (1 \leq r, s \leq n-1)$$

を得る. 以上のことから,  $J \neq \{0\}$  ならば次がいえる.

定理 3.3  $\exists (r, s)$  such that  $\text{Im}(\theta^{r, s}) \neq 0$ .

定理 3.4  $u: J(C_1) \rightarrow J(C_3), v: J(C_2) \rightarrow J(C_4)$  が isogenies ならば, ある  $\alpha(r, s) = \frac{1}{2} + i \in \mathbb{Z}$   $\text{Im}(\theta^{r, s}) \neq 0$ .  
 特に,  $\theta^{1,1}(u \otimes v)$  は  $2\gamma$  の divisors の  $\frac{1}{2}$  であり  $\alpha$  和と homologous  $\mathbb{Z}$ -valued algebraic cycle class とある  $\mathbb{Z}$  である.

4° 最後は, 3° によって  $J \rightarrow H_{\text{ét}}^4(C_1 \times C_2, C_3 \times C_4)_{\text{alg}}$  の部分に, 一般の代数曲線  $C_i$  にもどうも考察する.

$C_1, C_2, C_3, C_4$ : genus  $g$  の非特異代数曲線 }  
 $J(C_i)$ :  $C_i$  の Jacobi 多様体 ( $i=1, 2, 3, 4$ ). } とする.

a)  $\alpha = 1$  のとき (1.2) より.

$$H^4(C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4, \mathbb{Q})_{\text{alg}} \cong FH^4(C_1 \times C_2, C_3 \times C_4) \oplus H_{\text{ét}}^4(C_1 \times C_2, C_3 \times C_4)_{\text{alg}}$$

が成り立つ. また, 自然な準同型

$$\begin{aligned} \lambda: \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1), J(C_3)) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_2), J(C_4)) &\oplus \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_1), J(C_4)) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(J(C_2), J(C_3)) \\ &\longrightarrow H_{\text{ét}}^4(C_1 \times C_2, C_3 \times C_4)_{\text{alg}} \end{aligned}$$

が存在し, 次の命題が成立する.

命題 4.1

$$\frac{DH^4(C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4)}{DH^4(C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4) \cap FH^4(C_1 \times C_2, C_3 \times C_4)} \cong \text{Im}(\lambda).$$

b) 一方.  $\Sigma$  上の曲線  $\alpha$  と  $\Sigma$  上の曲面  $\beta$  に対し  
 $\Sigma$  は.  $\mathbb{P}^1$  と類似  $\alpha = \Sigma$  と考えられ.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^k, \dots, \gamma_{2g}^k &: H_1(C_k, \mathbb{Z}) \text{ の基底,} \\ \delta_1^k, \dots, \delta_{2g}^k &: H^1(C_k, \mathbb{Z}) \text{ における } \gamma_1^k, \dots, \gamma_{2g}^k \text{ の dual basis,} \\ \omega_1^k, \dots, \omega_g^k &: H^{1,0}(C_k) \text{ の基底} \end{aligned} \right\} \mathbb{Z}^n.$$

$$\Omega^k = \left[ \int_{\delta_i^k} \omega_j^k \right] = \begin{bmatrix} E_g \\ Z^k \end{bmatrix} \quad E_g: g \times g \text{ 単位行列}$$

$$\tau(Z^k) = Z^k, \operatorname{Im}(Z^k) > 0 \quad (Z^k \text{ の imaginary part})$$

$\Sigma$  上の  $\alpha$  と  $\beta$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ). また, 行列  $A = [a_{ij}]$   
 $\in M(m, n)$ ,  $B$  に対し  $\Sigma$ , 行列  $A \otimes B$  を

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad \Sigma \text{ 上で定義.}$$

補題 4.2  $X \in H^1(C_1, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_2, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_3, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_4, \mathbb{Z})$   
 が. 特に.  $X = \sum a_{ij}^{13} a_{jk}^{24} \delta_i^1 \otimes \delta_j^2 \otimes \delta_k^3 \otimes \delta_l^4$ ,  $A^{13} = [a_{ij}^{13}]$ ,  $A^{24} = [a_{jk}^{24}]$   
 $\in M(2g, \mathbb{Z})$  の形に書ける. また,  $X = \sum_{p+q=4} X^{p,q}$ ,  
 $X^{p,q} \in H^{p,q}(C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4)$  と書ける.  $\Sigma$  上の.

$$i) X^{4,0} = 0 \iff \tau(\Omega^1 \otimes \Omega^2) (A^{13} \otimes A^{24}) (\Omega^3 \otimes \Omega^4) = 0$$

$$ii) X^{3,1} = 0 \iff \begin{cases} \tau(\bar{\Omega}^1 \otimes \Omega^2) (A^{13} \otimes A^{24}) (\Omega^3 \otimes \Omega^4) = 0 \\ \tau(\Omega^1 \otimes \bar{\Omega}^2) (A^{13} \otimes A^{24}) (\Omega^3 \otimes \Omega^4) = 0 \\ \tau(\Omega^1 \otimes \Omega^2) (A^{13} \otimes A^{24}) (\bar{\Omega}^3 \otimes \Omega^4) = 0 \\ \tau(\Omega^1 \otimes \Omega^2) (A^{13} \otimes A^{24}) (\Omega^3 \otimes \bar{\Omega}^4) = 0 \end{cases}$$

命題 4.3  $X \in H^1(C_1, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_2, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_3, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_4, \mathbb{Z})$

とする.  $\alpha$  と  $\beta$  は同値である.

$$i) X = \sum a_{ik}^{13} a_{jl}^{24} \delta_i^1 \otimes \delta_j^2 \otimes \delta_k^3 \otimes \delta_l^4 \quad \text{の形に書ける.}$$

$$X \in H^{2,2}(C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4),$$

$$ii) X \in \text{Im}(\text{Hom}(\mathcal{T}(C_1), \mathcal{T}(C_3)) \otimes \text{Hom}(\mathcal{T}(C_2), \mathcal{T}(C_4))) \\ \rightarrow H^1(C_1, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_2, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_3, \mathbb{Z}) \otimes H^1(C_4, \mathbb{Z})$$

証明

$$\begin{aligned} {}^t(\Omega^1 \otimes \Omega^2)(A^{13} \otimes A^{24})(\Omega^3 \otimes \Omega^4) = 0 &\Leftrightarrow (\forall i, l) \sum_{j, k=1}^{2g} \omega_{ji}^1 a_{jk}^{13} \omega_{kl}^3 {}^t\Omega^2 A^{24} \Omega^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^t\Omega^1 A^{13} \Omega^3 = 0 \text{ or } {}^t\Omega^2 A^{24} \Omega^4 = 0 \end{aligned}$$

等号に注意すれば (4.2) より.

$$i) \Leftrightarrow \text{次の iii) ~ v) が成り立つ.}$$

$$iii) {}^t\Omega^1 A^{13} \Omega^3 = 0 \text{ かつ } {}^t\bar{\Omega}^1 A^{13} \Omega^3 = 0$$

$$iv) {}^t\Omega^2 A^{24} \Omega^4 = 0 \text{ かつ } {}^t\bar{\Omega}^2 A^{24} \Omega^4 = 0$$

$$v) {}^t\Omega^1 A^{13} \Omega^3 = 0 \text{ かつ } {}^t\Omega^2 A^{24} \Omega^4 = 0$$

ところが iii) または iv) ならば  $X = 0$  となる. 2. しまう.

$$v) \Leftrightarrow ii)$$

は I  $\alpha$  1°, 2° より明らかである.

## References

1. Grothendieck, A.: Le groupe de Brauer. Dix Exposés sur la cohomologie des schémas. North-Holland (1968).
2. Grothendieck, A.: SGA5 Cohomologie  $\ell$ -adique et fonctions L. Lecture Notes in Math. 589, Springer (1977).
3. Hodge, W. V. D., and Atiyah, M. F.: Integrals of the second kind on an algebraic variety. Annales of Math. 62 (1955) 56-91.
4. Kleiman, S. L.: Algebraic cycles and the Weil conjectures. Dix Exposés sur la cohomologie des schémas. North-Holland (1968).
5. Lang, S.: Abelian Varieties. Interscience Pub., New York (1959).
6. Lieberman, D.: Higher Picard varieties. Amer. J. Math. 90 (1968) 1165-1199.
7. Lieberman, D.: Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds. *ibid.* 90 (1968) 366-374.
8. Sasakura, N.: On some results on the Picard numbers of certain algebraic surfaces. J. Math. Soc. Japan 20 (1968) 297-321.
9. Shioda, T., and Inose, H.: On singular K3 surfaces. Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami-Cambridge Univ. Press (1977) 119-136.
10. Tate, J. T.: Algebraic cycles and poles of the zeta function. Arithmetical Algebraic Geometry. Happer & Row, New York (1965) 93-110.

11. Tate, J. T.: Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Inv. math. 2 (1966) 134-144.
12. Weil, A.: Variétés Abéliennes et Courbes Algébriques. Hermannn, Paris (1948).